Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 22 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(5+2 Punkte)* Für metrische Räume $(X, d), (Y, e)$ sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion.

(a) Zeige, dass f genau dann stetig auf X ist, falls für alle offenen Mengen $O \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(O)$ offen in X liegt.

Hinweis: Verbinde innere Punkte offener Mengen mit punktweiser Stetigkeit.

(b) Folgere aus (a), dass stetige Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ die Kompaktheit erhalten, d.h. für alle kompakten Mengen $K \subset X$ ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.

Hinweis: Betrachte die Urbilder offener Überdeckungen von $f(K)$.

Lösung. (a): Wir nehmen zuerst an, dass f stetig auf X ist und fixieren eine offene Menge $O \subset Y$. Wir zeigen dann, dass jedes $x_0 \in f^{-1}(O)$ ein innerer Punkt ist, womit $f^{-1}(O)$ offen ist. Da $f(x_0)$ innerer Punkt von O ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(f(x_0), \varepsilon) \subset O$. Da f insbesondere stetig in $x_0 \in X$ ist, existiert dazu ein $\delta > 0$ mit

$$d(x, x_0) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad e(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Also gilt für alle $x \in B(x_0, \delta)$, dass $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ und damit

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset O.$$

Insbesondere folgt auch für das Urbild, dass $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(O)$, was zu zeigen war.

Umgekehrt sei $f^{-1}(O)$ offen für alle offenen Mengen $O \subset Y$ und fixiere $x_0 \in X$. Wir zeigen hier, dass f stetig in diesem beliebigen $x_0 \in X$ ist. Für $\varepsilon > 0$ ist das Urbild $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ offen in X und es enthält trivialerweise x_0. Also existiert auch $\delta > 0$ sodass

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)).$$

Dies bedeutet allerdings mit anderen Worten: Wann immer $d(x, x_0) < \delta$ gilt, dann ist x im Urbild der offenen ε-Kugel um $f(x_0)$ und damit $e(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist f (punktweise) stetig in x_0.

(b): Gegeben sei eine beliebige offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von $f(K) \subset Y$ und wir müssen eine endliche Teilüberdeckung finden. Dazu bemerken wir

$$K \subset \bigcup_{j \in J} f^{-1}(V_j),$$

da jedes $y \in f(K)$ in mindestens einem V_j enthalten sein muss und damit alle Urbilder dieses y (also insbesondere die aus K) in $f^{-1}(V_j)$. Nach (a) ist $(f^{-1}(V_j))_{j \in J}$ eine offene

Überdeckung von K und wir wählen mittels Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(V_j))_{j=1,\dots,n}$. Anwendung von f bedingt daher schließlich, dass

$$f(K) \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_j$$

und $f(K)$ ist kompakt, da die Überdeckung beliebig war. ■

Aufgabe 2: *(3 Punkte)* Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeige, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Lösung. Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dann existiert eine Folge rationaler Zahlen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. Also gilt auch

$$0 = f(x) \neq \lim_{n\to\infty} f(q_n) = 1$$

und f ist nach der Charakterisierung über Folgenstetigkeit nicht stetig in x. Für $x \in \mathbb{Q}$ können wir ferner eine beliebige irrationale Nullfolge wählen (z.B. $x_n := \pi/n$) und dasselbe Argument mit der Folge $q + x_n$ durchführen. Also ist f auch nicht stetig in $x \in \mathbb{Q}$. ■